Μαθημα 25ο

Διαφ. Εξισωσεις

15/1/2018

(E_0^2) $\quad a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$\quad a_0, a_1, a_2 \in C(I)$, $a_2(x) \neq 0$, $x \in I$ (Sturm)

Εστω $a_2(x) > 0$, $x \in I$

$$y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = 0$$

$$e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} y'' + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(s)}{a_2(s)} ds} y' + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds} \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = 0$$

$$\Big[\underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds}}_{P(x)} y' \Big]' + \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_2(s)} ds} \frac{a_0(x)}{a_1(x)}}_{Q(x)} y = 0$$

Συναρτηση δελτα

(Δ) $\quad [P(x) y']' + Q(x) y = 0$, $P, Q \in C(I)$, $P(x) > 0$, $x \in I$

Προταση (Abel)

Αν y_1, y_2 δυο λυσεις της (Δ) τοτε

$$p(x)[y_1'(x) y_2(x) - y_2'(x) y_1(x)] = k, \quad x \in I$$

αποδειξη

Ας ειναι y_1, y_2 λυση της (Δ). Παρατηρουμε οτι η (Δ) γραφεται

$$p(x) y'' + p'(x) y'(x) + Q(x) y = 0$$

Εχουμε

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p'(s)}{p(s)} ds} = W(y_1, y_2)(x_0) e^{-\ln p(s) \Big|_{s=x_0}^{s=x}} =$$

$$= W(y_1, y_2)(x_0) \frac{p(x_0)}{p(x)} \Rightarrow [y_1'(x) y_2(x) - y_2'(x) y_1(x)] \cdot p(x) = \cancel{k}$$

$$\Big(= \underbrace{W(y_1, y_2)(x_0) \cdot p(x_0)}_{\text{σταθ.}} \Big) = k$$

το πολυ πεπερασμενο πληθος ριζων σ'ενα διαστημα I.

Προταση (Θεωρ. 26)

Ας ειναι y μια λυση της (Δ) και J συμπαγες υποδιαστημα του I.
Αν η y μηδενιζεται σε απειρα το πληθος σημεια του J τοτε
$y(x)=0$, $x\in J$

αποδειξη

Ας ειναι y μια λυση της (Δ) και $S=\{x\in J,\ y(x)=0\}$
Υποθ. οτι το S εχει απειρα το πληθος σημεια. Επομενως το
S θα εχει (τουλαχιστον) ενα σ.σ., εστω x_0
τοτε υπαρχει $(x_\nu)\in S$ με $x_\nu\to x_0$
Παρατηρουμε οτι $y(x_0)=\lim_{x_\nu\to x_0} y(x_\nu)=0$ επειδη y συνεχης στο x_0
$\left(=\lim_{x_\nu\to x_0} 0=0\right)$

Επειδη η y ειναι λυση της (Δ) ειναι και παραγωγισιμη
συναρτηση και μαλιστα

$$y'(x_0)=\lim_{x_\nu\to x_0}\frac{y(x_\nu)-y(x_0)}{x_\nu-x_0}=\lim_{x_\nu\to x_0}\frac{0-0}{x_\nu-x_0}=0$$

δηλ. για την λυση y της (Δ) εχουμε
$y(x_0)=0=y'(x_0)$
Επομενως η y ειναι λυση του ΠΑΤ (Δ) $y(x_0)=0=y'(x_0)$
αρα $y(x)=0$, $x\in J$.

Παρατηρηση

Αν $y\neq 0$ λυση της Δ τοτε η y εχει το πολυ πεπερασμενο
πληθος ριζων σε οποιοδηποτε κλειστο υποδιαστημα του I.
μια κοινη ριζα αρα ποδλεια η μια την αλλης

Προταση Θεωρ. 28 γρ. ανεξ. λυσεις ⇒ δεν εχω κοινες ριζες

Ας ειναι y_1, y_2 δυο λυσεις της (Δ)
1) Αν y_1, y_2 μια κοινη ριζα τοτε ειναι γρ. εξαρτημενες
2) Αν $y_1\neq 0$, $y_2\neq 0$ ειναι γρ. εξαρτ. τοτε καθε ριζα της y_1 ειναι
και ριζα της y_2 και αντιστροφα

απόδειξη

Ας είναι y_1, y_2 δύο λύσεις της (Δ)

1) Αν το x_0 είναι ρίζα κοινή της y_1, y_2 τότε

$$W(y_1,y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$$

άρα y_1, y_2 γραμμ. εξαρτ.

2) Ας είναι $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ δύο γραμμ. εξαρτ. λύσεις της (Δ)

Τότε $\exists$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + |c_2| \neq 0$ και $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

Έστω ότι $c_1 \neq 0$ τότε

$$y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(x)$$

Αν x_0 ρίζα της y_2 τότε έχουμε $y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} y_2(x_0) = 0$

δηλ. η x_0 ρίζα και της y_1.

Παρατηρούμε ότι $c_1 \neq 0 \Rightarrow c_2 \neq 0$

Πράγματι αν $c_2 = 0$ τότε $c_1 y_1 = 0$ $\forall x \in I$ με $c_1 \neq 0$ άρα $y_1 = 0$ $x \in I$

Επομένως αν x_0 ρίζα της y_1, τότε $y_2(x_0) = -\frac{c_1}{c_2} y_1(x_0) = 0$

δηλ. x_0 και ρίζα της y_2

Παρατήρηση

Δύο γραμμ. ανεξ. ρίζες της (Δ) δεν έχουν κοινή ρίζα

Πρόταση (Θεώρημα 29 Sturm)

Ας είναι y_1, y_2 δύο γραμμ. ανεξ. λύσεις της (Δ) τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1, υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της y_2

αποδειξη

Ας ειναι y_1, y_2 δυο γραμ. ανεξ. λυσεις της (8) και $a, b \in I$ δυο διαδοχικες ριζες της y_1 ($y_1(a) = y_1(b) = 0$)

το θ.26 εχει μεγαλη σημασια για να εχω διαδοχικες ριζες

Εστω οτι η y_2 δεν εχει ριζα στο (a,b).

Παρατηρω οτι $y_2(a) \neq 0 \neq y_2(b)$ επειδη οι y_1, y_2 γραμ. ανεξ. (θ.28) [Επειδη y_1, y_2 γραμ. ανεξ δεν εχουν κοινη ριζα αρα $y_1(a) \neq 0$, $y_2(b) \neq 0$]

Αρα $y_2(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ και επειδη y_2 ειναι συνεχης θα ειναι σταθερου προσημου στο $[a,b]$ εαν $y_2(x) > 0$, $x \in [a,b]$

Τοτε οριζεται η συναρτηση $f(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, $x \in [a,b]$ η οποια

ειναι παραγωγισιμη στο (a,b) και

$$f(a) = \frac{y_1(a)}{y_2(a)} = 0 = \frac{y_1(b)}{y_2(b)} = f(b)$$

απο το Θεωρημα Rolle στο $[a,b]$ για την f εχουμε οτι

$\exists\ \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

δηλαδη

$$\frac{y_1'(\xi) y_2(\xi) - y_2'(\xi) y_1(\xi)}{y_1^2(\xi)} = 0 \Rightarrow W(y_1, y_2)(\xi) = 0$$

αρα y_1, y_2 γραμ. εξαρτ. ατοπο

Επομενως η y_2 εχει τουλαχιστον μια ριζα p_1 μεταξυ των a, b

Θελω να δειξω τωρα οτι δεν εχει δευτερη (δηλ. οτι ειναι μοναδικη)

Υποθετω οτι υπαρχει και αλλη ριζα $p_2 \neq p_1$ της y_2 μεταξυ των a, b τοτε απο το συμπερασμα υπαρξης που ηδη αποδειχθηκε η (γραμ. ανεξ.) λυση y_1 θα εχει τουλαχιστον μια ριζα c μεταξυ των p_1, p_2 δηλ. θα υπαρχει $c \in (a,b)$ με $y_1(c) = 0$, ατοπο γιατι υποθεσαμε οτι οι a, b ειναι διαδοχικες ριζες της y_1

Παράδειγμα 1

$y_1(x) = \sin 2x + \cos 2x \qquad x \in \mathbb{R}$

$y_2(x) = \sin 2x - \cos 2x$

Να δείξετε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει μια ρίζα της y_2 και το αντίστροφο.

απάντηση

Ελέγχω αν είναι γρ. ανεξ. με την ορίζουσα Wronski

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \dots \neq 0$$

άρα θα βρω την εξίσωση $2^{ης}$ τάξης κ.ο.κ. ..

β' τρόπος

Εφόσον y_1, y_2 γρ. ανεξ. αν τις προσθέσω ή τις αφαιρέσω θα έχω πάλι μια λύση

$z_1(x) = \cos 2x$

$z_2(x) = \sin 2x$

Είναι λύσεις της $y'' + 4y = 0$

παραγωγίζω

$y_1'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$

$y_2'(x) = 2\cos 2x + 2\sin 2x$

Υπολογίζω $W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$

άρα γρ. ανεξ. (και έχω τελειώσει) ?.